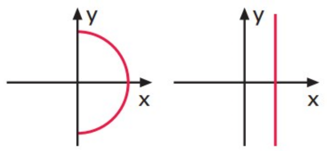
# GRUNDWISSEN 8. KLASSE

## FUNKTIONEN ALLGEMEIN

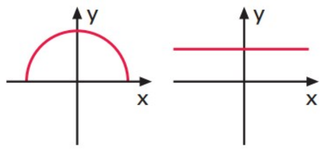
### ZUORDNUNG UND DARSTELLUNGSFORMEN:

Eine **Zuordnung** $x \mapsto y$ beschreibt die Abhängigkeit zweier Größen x und y. Wird jedem Wert x aus der Definitionsmenge D genau ein Wert y aus der Wertemenge W zugeordnet, so ist die Zuordnung eindeutig und heißt **Funktion**.

Keine Funktionsgraphen:




Funktionsgraphen:




Darstellungsformen von Funktionen

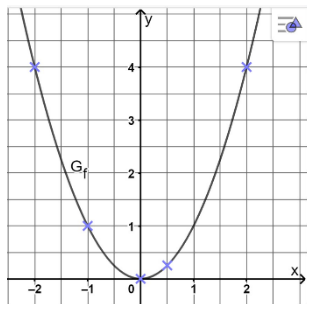
Wortform:
$f$: Einer rationalen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet

Funktionsterm: $f(x) = x^2$
Funktionsgleichung: $y = x^2$

Wertetabelle:

| x | -2 | -1 | 0 | 0,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 4 | 1 | 0 | 0,25 | 4 |

Funktionsgraph:




## LINEARE FUNKTIONEN

### STEIGUNG, Y-ACHSENABSCHNITT, NULLSTELE:

$f(x) = m \cdot x + t$

$m$ heißt **Steigung** und $t$ heißt **y-Achsenabschnitt** der zugehörigen Geraden

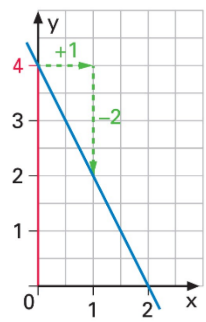
z.B.: $f(x) = -2x + 4$

y-Achsenabschnitt $(0|t)$ einzeichnen

**Steigungsdreieck**

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{"Höhenzuwachs"}}{\text{"waagrechten Zuwachs"}} = \frac{-2}{1}$

Nenner 1LE in positive Richtung
Zähler 2LE in negative Richtung




Ein $x$-Wert, für den der y-Wert Null ist heißt **Nullstelle.** Hier: $x = 2$

## GERADENGLEICHUNG AUFSTELLEN:

Sind zwei Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ der Geraden bekannt, so kann man die Geradengleichung berechnen:

1. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
2. Einsetzen der Koordinaten von A oder B in $y = mx + t$ und nach $t$ auflösen

$$A(3|1) \quad B(2|-4)$$
$$m = \frac{1-(-4)}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$$

A (3 | 1)
$$\begin{aligned} y &= 5x + t \\ 1 &= 5 \cdot 3 + t \\ -14 &= t \\ y &= 5x - 14 \end{aligned}$$

## LINEARE UNGLEICHUNGEN

Sind zwei Terme durch $<, \leq, >$ *oder* $\geq$ verbunden entsteht eine **Ungleichung**. Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht man das Ungleichheitszeichen um.

Bsp:
$$\begin{aligned} -3x + 1 &< 7 \quad &| -1 \\ -3x &< 6 \quad &| : (-3) \\ x &> -2 \quad &! \end{aligned}$$


Intervallschreibweise:
$L = ]-2; \infty[$

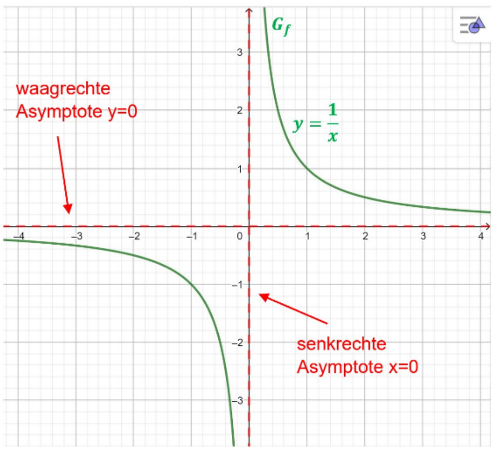
Mengenschreibweise:
$L = \{x | x > -2\}$

## GEBROCHEN RATIONALE FUNKTIONEN

**Asymptoten** sind Geraden, an die sich der Graph beliebig nahe annähert, diese aber nie schneidet. X-Werte für die der Nenner der Funktion gleich Null wird, heißen **Polstelle** oder **Definitionslücke**. In der Definitionsmenge müssen diese Stellen ausgeschlossen werden.
Der Graph heißt **Hyperbel**. Er besteht aus zwei punkt- bzw. achsensymmetrischen Ästen.

Die **Funktion** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ $; x \neq 0$ ist ein Beispiel für eine gebrochen rationale Funktion.

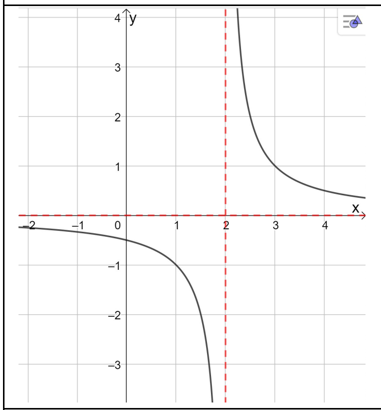
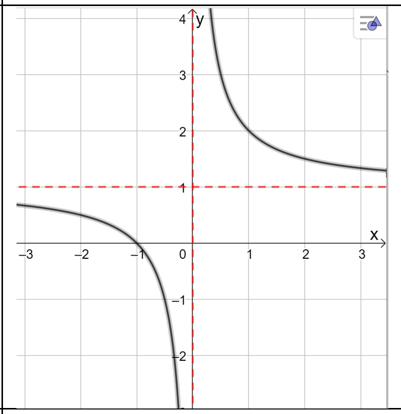
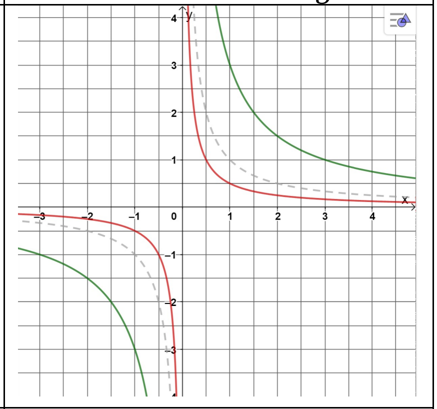
**Definitionsmenge**: $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
**Senkrechte Asymptote**: $x = 0$
**Waagrechte Asymptote**: $y = 0$



## ELEMENTRARE GEBROCHEN RATIONALE FUNKTION

Elementare gebrochen-rationale Funktion $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x+b}} + \boldsymbol{c}$ $;a \neq 0, x \neq -b.$

Einfluss der Parameter $a, b, c$ auf den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$.

| $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ | $\boldsymbol{a}$ |
|---|---|---|
| Verschiebung in x-Richtung<br><br>um $-b$ | Verschiebung in y-Richtung<br><br>um $c$ | Stauchung/Streckung<br><br>$0 < a < 1$ $Stauchung$<br>$a > 1$ $Streckung$ |
|  |  |  |
| $y = \dfrac{1}{x-2}$ | $y = \dfrac{1}{x} + 1$ | $rot\colon\ y = \dfrac{0{,}5}{x}$ $grün\colon\ y = \dfrac{3}{x}$ |

## BRUCHTERME

In einem Bruchterm kommt die Variable auch im Nenner vor. Zahlenwerte für die der Nenner Null wird müssen aus der Definitionsmenge ausgenommen werden.

Bsp: $T(x) = \frac{2}{x-3}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{3\};$ $T(a) = \frac{2+a}{a(a+1)}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-1{,}0\}$

### Rechnen mit Bruchtermen

| Rechen-operation | Faustregel | Beispiel |
|---|---|---|
| Kürzen | Zuerst Zähler und Nenner faktorisieren<br>**<u>KEIN</u>** Kürzen in Summen und Differenzen | $\dfrac{2x+2}{x^2+x} = \dfrac{2(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{2}{x}$<br><br>$D = \mathbb{Q}\setminus\{-1;0\}$ |
| Multiplikation | „Zähler mal Zähler“ / „Nenner mal Nenner“ | $\dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{6x}{(x-1)(x+1)}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{-1;1\}$ |
| Division | = Multiplikation mit dem Kehrbruch des Divisors | $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{3}{x} = \dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{x}{3} = \dfrac{2x^2}{3x-3}$ $D = \mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Addition/Subtraktion | Bruchterme auf einen Hauptnenner bringen (mit entsprechenden Faktoren erweitern) | $\frac{2}{a+1}+\frac{3}{a}=\frac{2\cdot a}{(a+1)\cdot a}+\frac{3\cdot(a+1)}{a\cdot(a+1)}=$ $\frac{2a+3a+3}{a\,(a+1)}=\frac{5a+3}{a(a+1)}$ $D=\mathbb{Q}\backslash\{-1;0\}$ |

## BRUCHGLEICHUNGEN LÖSEN

Eine Bruchgleichung entsteht, wenn zwei Bruchterme mit einem „=“ Zeichen verbunden werden.
Unterscheid zwei Strategien zum Lösen:

**Strategien**

1. Definitionsmenge bestimmen

| | |
|---|---|
| 2. Form: $\frac{Z_1}{N_1}=\frac{Z_2}{N_2}$ bringen | 2. Auf einen HN |
| 3. Überkreuz Multiplizieren lösen $Z_1\cdot N_2=Z_2\cdot N_1$ | 3. Zählergleichung |
| 4.Lösungsmenge angeben angeben | 4. Lösungsmenge |

Beispiel:

$\frac{3x}{x^2+1}=\frac{3}{-2+x}$ $\quad D=\mathbb{Q}\backslash\{2\}$

Überkreuz multiplizieren möglich

$3x(-2+x)=3(x^2+1)$

$-6x+3x^2=3x^2+3 \qquad |-3x^2$

$-6x=3 \qquad |:(-6)$

$x=-\frac{1}{2}$

$L=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

## RECHENREGELN FÜR DAS RECHNEN MIT NEGATIVEN EXPONENTEN

Für jede von Null verschiedene Zahl gilt: $\boldsymbol{a^0=1}$ Z.B.: $3^0=1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^0=1$

$\boldsymbol{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$ z.B.: $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

<u>Potenzen mit gleicher Basis</u>

(1) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
$2^3\cdot 2^{-5}=2^{3+(-5)}=2^{-2}$

(2) $a^n:a^m=a^{n-m}$
$3^{-2}:3^4=3^{-2-4}=3^{-6}$

(3) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
$(4^2)^5=4^{2\cdot 5}=4^{10}$

<u>Potenzen mit gleichem Exponenten</u>

(1) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

(2) $(a:b)^n=a^n:b^n$

(3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

## ZUFALLSEXPERIMENTE

Beispiele für Zufallsexperimente: Ziehen aus einer Urne (mit und ohne Zurücklegen); Werfen eines Würfels, Tetraeders,…; Werfen einer Münze; Drehen eines Glücksrads; Roulette

Wichtige Begriffe:

**Ergebnismenge/Ergebnisraum** $\Omega$: Menge aller Ergebnisse
**Ereignis** $E$: Teilmenge der Ergebnismenge
**Gegenereignis** $\overline{E}$: Alle Ergebnisse aus $\Omega$, die nicht in $E$ sind
**Elementarereignis**: Teilmenge von $\Omega$, da genau ein Element enthält

$\Omega = \{rot, orange, grün\}$
$A$: rot oder grün
$\bar{A}$: $orange$

**Laplace-Experimente:**
Sind bei einem Zufallsexperiment alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich, dann heißt es Laplace Experiment.
Beispiele: Werfen einer Münze, Werfen eines (nicht gezinkten) Würfels

Gibt es $n$ verschiede Ergebnisse, so gilt $\boldsymbol{P(n) = \frac{1}{n}}$
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten: $\boldsymbol{P(E) = \frac{Anzahl\ günstige\ Ergbenisse}{Anzahl\ möglicher\ Ergebnisse} = \frac{|E|}{|\Omega|}}$

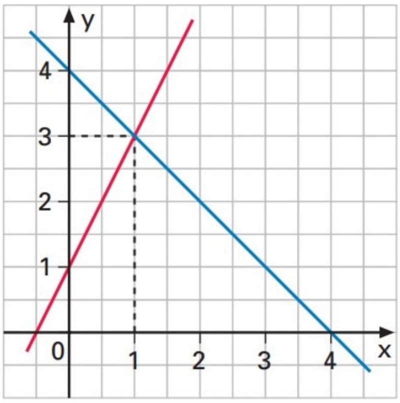
## GLEICHUNGSSYSTEME

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit den jeweils selben zwei Variablen. Lösung ist ein **Zahlenpaar (x|y).**

### LÖSUNGSVERFAHREN:

| | |
|---|---|
| $(I)\ 4x - 2y = -2$<br>$(II) x + y = 4$<br><br>$(I')\ y = 2x + 1$<br>$(II') y = -x + 4$ | **Rechnerische Lösung**<br><br>**Gleichsetzverfahren**: beide Gleichungen nach derselben Variable auflösen; Terme gleichsetzten<br><br>$(I') = (II')$ |

**Graphische Lösung:**
Schnittpunkt der zugehörigen Geraden




$x = 1$
einsetzten in (I') oder (II'): $y = 3$
→ $L = \{(1|3)\}$

-----------------------------------------------------

**Einsetzverfahren**: eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und einsetzen; Achtung Klammern setzten!

z.B.: $(II')\ in\ (I)$

$$4x - 2(-x + 4) = -2$$
$$4x + 2x - 8 = -2$$
$$6x - 8 = -2$$
$$6x = 6$$
$$x = 1$$

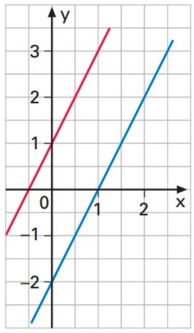
einsetzten in (I') oder (II'): $y = 3$
→ $L = \{(1|3)\}$

**Ohne Lösung**

$(I)\ \ 2x - y = -1$
$(II)\ \ 6x - 3y = 6$

$(I')\ y = 2x + 1$
$(II')\ y = 2x - 2$

**Graphisch**




**Rechnerisch**
(II') in (I)

$2x - (2x - 2) = -1$
$2x - 2x + 2 = -1$
$2 = -1$
falsch

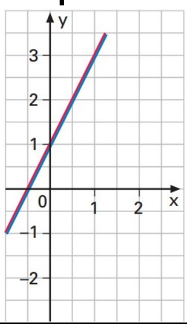
→ $L = \{\ \ \}$

**Unendlich viele Lösungen**

$(I)\ \ 2x - y = -1$
$(II)\ 6x - 3y = -3$

$(I')\ y = 2x + 1$
$(II')\ y = 2x + 1$

**Graphisch**

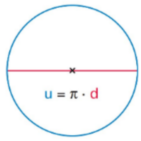



**Rechnerisch**
(I') in (II)

$2x - (2x + 1) = -1$
$-1 = -1$
wahr

→ $L = \mathbb{Q}$

## KREIS, ZYLINDER UND PRISMA

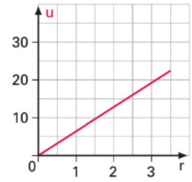



**Kreisumfang**

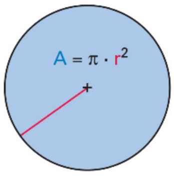
Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$ $\pi \notin \mathbb{Q}$

Kreisumfang $U_{Kreis} = d \cdot \pi$ **oder** $U_{Kreis} = 2r \cdot \pi$

Der Umfang ist direkt proportional zum Durchmesser und zum Radius, d.h. verdoppelt, verdreifacht… man den Radius bzw. Durchmesser, so verdoppelt, verdreifacht… sich der Kreisumfang.



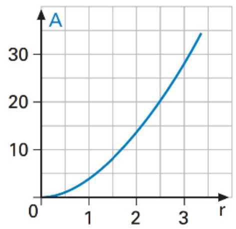

Ursprungsgerade

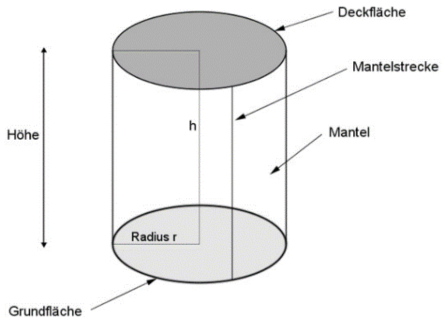



**Kreisfläche**

Kreisfläche $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Die Zuordnung, die jedem Radius die Kreisfläche zuordnet ist
<u>keine</u> lineare Funktion. Verdoppelt man z.B. den Radius, so vervierfacht sich der Flächeninhalt. Verdreifacht man den Radius, so verneunfacht man den Flächenihlat…




https://unterrichten.zum.de/wiki/Zylinder-Oberfläche

**Zylinder**

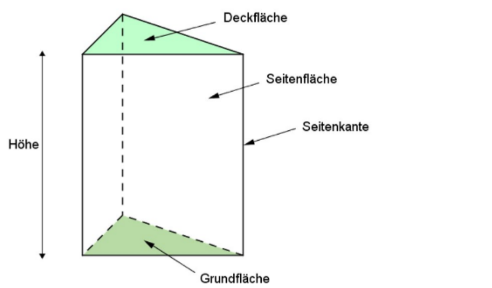
Oberflächeninhalt $O_{Zylinder} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot h$

Volumen $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

**Prisma**

Oberflächeninhalt $O_{Prisma} = 2 \cdot G + M$

Volumen $V_{Prisma} = G \cdot h$




https://www.mathe-online.at/lernpfade/koerper/?kapitel=4&navig=r