GRUNDWISSEN 11. KLASSE

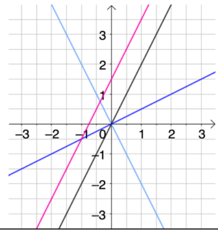
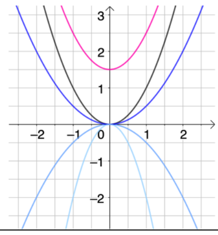
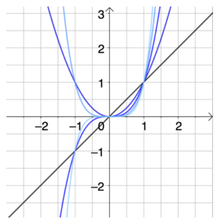
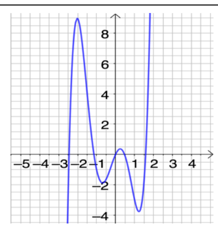
EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN

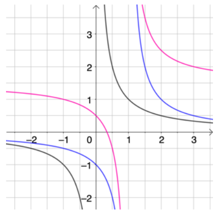
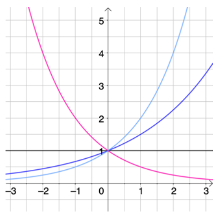
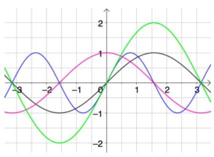
ALLGEMEIN

Funktionen haben verschiedene Eigenschaften, die du am Funktionsterm untersuchen kannst und die sich in der Form des Graphen widerspiegeln.

FUNKTIONSKLASSEN

Kommentiert [BS1]: Bilder

Name	Form des Funktionsterms	Graph
Lineare Funktionen	$f(x) = mx + t$	Gerade 
Quadratische Funktionen	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Parabel 
Potenzfunktionen	$f(x) = a \cdot x^n$	
Ganzrationale Funktionen	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	

Elementare gebrochen-rationale Funktionen	$f(x) = \frac{a}{x-b} + c$	Hyperbel 
Exponentialfunktionen	$f(x) = b \cdot a^x$	
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x-c)\big) + d$ $f(x) = a \cdot \cos\big(b(x-c)\big) + d$ $f(x) = a \cdot \tan\big(b(x-c)\big) + d$	Sinus-/Kosinusfunktion 

VERHALTEN IM UNENDLICHEN – GRENZWERTE

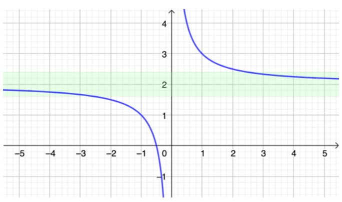
Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte und damit der Graph für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ verhält. Folgende Möglichkeiten werden unterschieden:

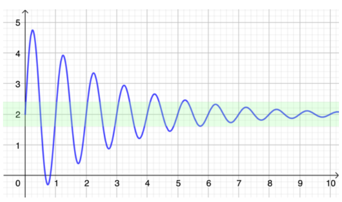
Konvergenz:

Kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig groß/klein werdende x-Werte einer Zahl g beliebig nahe, so heißt g **Grenzwert** von f für $x \to \pm\infty$ und man sagt: „Die Funktion konvergiert für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen g." Hiermit verbunden ist die **Asymptote** bei $y = g$, der sich der Graph annähert.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$

Beispiele:





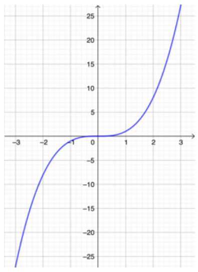
Divergenz:

Wenn die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ beliebig groß oder beliebig klein werden, dann **divergiert f bestimmt**.

Kommentiert [BS2]: Bild

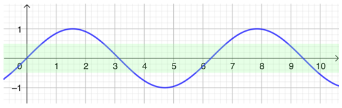
Schreibweise: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ bzw. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

Beispiele: Potenzfunktionen, ganzrationale Funktionen



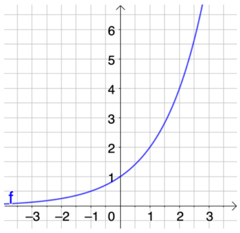
Wenn die Funktion weder konvergiert noch bestimmt divergiert, dann **divergiert f unbestimmt**.

Beispiel: $f(x) = \sin x$ oder $f(x) = \cos x$



Es ist auch möglich, dass für $x \to -\infty$ Konvergenz und für $x \to +\infty$ bestimmte Divergenz vorliegt oder umgekehrt.

Beispiel: Exponentialfunktionen wie $f(x) = 2^x$.

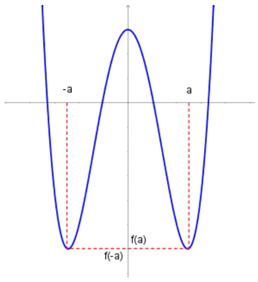


SYMMETRIE ZUM KOORDINATENSYSTEM

Achsensymmetrie:

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

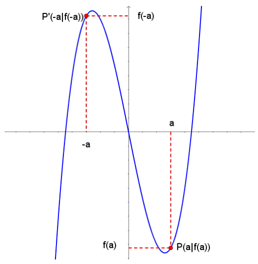
$$f(-x) = f(x)$$



Punktsymmetrie:

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

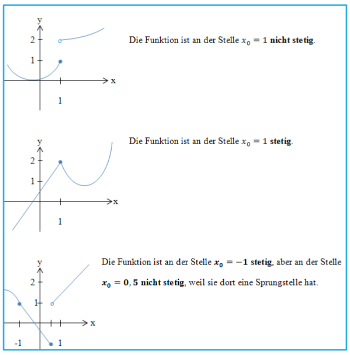
$$f(-x) = -f(x)$$



STETIGKEIT

Eine (abschnittsweise definierte) Funktion f heißt **stetig an einer Nachtstelle x_0**, wenn die Graphenstücke von f in x_0 aufeinandertreffen.

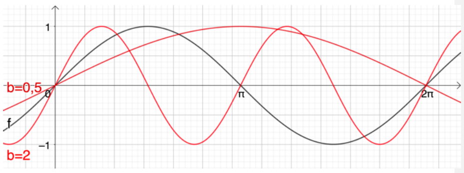
Allgemein heißt eine **Funktion stetig**, wenn ihr Graph innerhalb ihres Definitionsbereichs keine Sprünge macht.



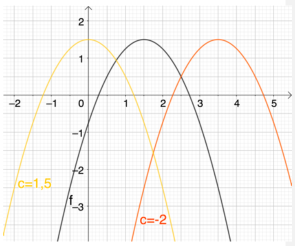
TRANSFORMATIONEN

Der Graph g einer Funktion $g(x) = a \cdot f(b(x + c)) + d$ mit $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c, d \in \mathbb{R}$, entsteht aus dem Graphen f einer Funktion $f(x)$, $D_f = D_{f\,max}$, durch…

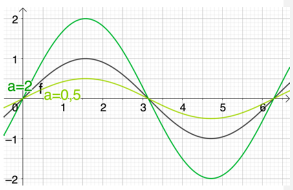
1. Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ in x-Richtung
   - Für b < 0 wird der Graph zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.
   - Schnittpunkte mit der y-Achse sind Fixpunkte.
   - Streckung mit einem Faktor $\frac{1}{|b|}$, der kleiner als 1 ist = Stauchung.



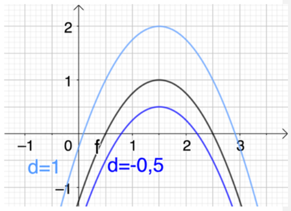
2. Verschieben um |c| in x-Richtung
   - c > 0: Verschiebung in negative x-Richtung (links)
   - c < 0: Verschiebung in positive x-Richtung (rechts)



3. Streckung mit dem Faktor |a| in y-Richtung
   - Für a < 0 wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
   - Nullstellen sind Fixpunkte
   - Streckung mit einem Faktor, der kleiner als 1 ist = Stauchung.



4. Verschieben um |d| in y-Richtung
- d > 0: Verschiebung in positive y-Richtung
- d < 0: Verschiebung in negative y-Richtung



Bei der Kombination mehrerer solcher Transformationen ist es notwendig, die angegebene Reihenfolge einzuhalten, da sich sonst andere Funktionsgraphen ergeben.

GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTIONEN

Eine **gebrochen-rationale Funktion** f ist eine Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q ganzrationale Funktionen sind (q mindestens vom Grad 1).

Die Nullstellen des Nenners q heißen **Definitionslücken** von f.

Die Nullstellen des Zählers p, die keine Nullstellen des Nenners q sind, sind die Nullstellen der Funktion f. Bei einer einfachen Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse (Vorzeichenwechsel), bei einer doppelten Nullstelle berührt er die x-Achse, ohne sie zu schneiden.

Eine Polstelle von f ist eine Definitionslücke x_0 von f mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty.$$

Der Graph von f hat dann eine **senkrechte Asymptote** mit der Gleichung

$$x = x_0.$$

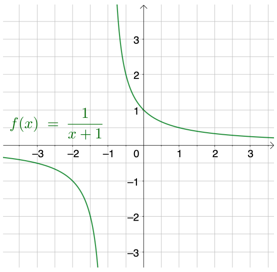
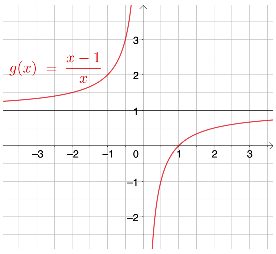
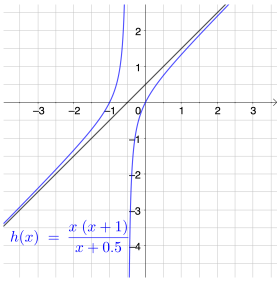
Jede Nullstelle des Nenners einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion ist eine **Polstelle** der Funktion.

Im vollständig gekürzten Term von f ist eine
- einfache Nullstelle des Nenners eine Polstelle **mit Vorzeichenwechsel**,
- doppelte Nullstelle des Nenners eine Polstelle **ohne Vorzeichenwechsel**.

WAAGERECHTE UND SCHRÄGE ASYMPTOTEN

Für eine gebrochen-rationale Funktion f mit Zählergrad z und Nennergrad n gibt es folgende Möglichkeiten für das Verhalten im Unendlichen:

$z < n$	$z = n$	$z > n$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a, a \neq 0$ Der Graph hat die Gerade $y = a$ als waagerechte Asymptote.	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Der Graph hat keine waagerechte Asymptote.

Der Graph hat die x-Achse als waagerechte Asymptote.	Der Wert von a ist der Quotient der Leitkoeffizienten von p(x) und q(x).	Ist $z = n + 1$ hat der Graph eine schräge Asymptote.
		
Konvergenz	Konvergenz	Bestimmte Divergenz

SCHNITTPUNKTE VON GRAPHEN

Zum Bestimmen der Koordinaten von Schnittpunkten der Graphen gebrochen-rationaler Funktionen setzt man die Funktionsterme wie immer gleich. Nun führt man die entstehende Gleichung durch „**Überkreuz-Multiplizieren**“ auf eine lineare oder quadratische Gleichung zurück, wenn möglich. Anschließend setzt man die Lösungen in eine der Funktionsgleichungen ein, um die y-Koordinaten zu berechnen.

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$P_A(B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt unter der Bedingung, dass das Ereignis A bereits eingetreten ist. Es gilt für $P(A) > 0$:

$$\mathbf{P_A(B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

Bei einem Baumdiagramm gibt es bedingte Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der 2. Stufe.

Aus einer Vierfeldertafel erhält man bedingte Wahrscheinlichkeiten, indem man einen Eintrag in einem inneren Feld durch einen zugehörigen Eintrag in einem äußeren Feld dividiert.

Beispiel: $\mathbf{P_A(B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(A)}}$

	B	$\bar{B}$	gesamt
A	$\mathbf{P(A \cap B)}$	$\mathbf{P(A \cap \bar{B})}$	$\mathbf{P(A)}$
$\bar{A}$	$\mathbf{P(\bar{A} \cap B)}$	$\mathbf{P(\bar{A} \cap \bar{B})}$	$\mathbf{P(\bar{A})}$
gesamt	$\mathbf{P(B)}$	$\mathbf{P(\bar{B})}$	1

AUF DIE BEDINGUNG KOMMT ES AN

Bei $P_B(A)$ ist das Eintreten von B bereits bekannt und bei $P_A(B)$ ist das Ereignis A bereits eingetreten.

Liegt ein Baumdiagramm vor, auf dessen erster Stufe das Ereignis A steht, kann zwar die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ direkt aus dem Baumdiagramm abgelesen werden, nicht aber $P_B(A)$.

Mithilfe der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit können wir sie aber leicht herleiten:

1. Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
2. P(B) aus Baumdiagramm bestimmen: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ und in Formel einsetzen:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$$

UNABHÄNGIGKEIT

Zwei Ereignisse A und B mit $P(A) > 0, P(B) > 0$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$\mathbf{P_A(B) = P(B)} \text{ und } \mathbf{P_B(A) = P(A)}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Multiplikationsregel gilt:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

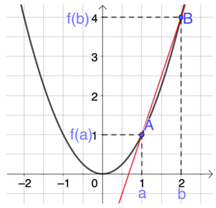
KORRELATION UND KAUSALITÄT

Besteht zwischen zwei Ereignissen eine **stochastische Abhängigkeit**, dann gibt es zwischen den zugehörigen Merkmalen einen Zusammenhang, den man in der Statistik auch als **Korrelation** bezeichnet.

Eine Korrelation bedeutet aber nicht, dass sich die Merkmale im Sachzusammenhang direkt beeinflussen. Das wäre eine **Kausalität**.

Es ist auch möglich, dass beide Merkmale von einem oder mehreren weiteren Merkmalen beeinflusst werden. Dies macht Interpretationen in Sachzusammenhängen schwierig.

MITTLERE ÄNDERUNGSRATE – DIFFERENZENQUOTIENT



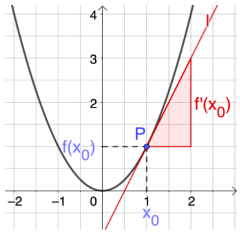
Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[a; b]$ an.

Sie entspricht anschaulich der Steigung m der Sekante durch die Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$.

MOMENTANE ÄNDERUNGSRATE – DIFFERENZIALQUOTIENT – ABLEITUNG

Schiebt man den Punkt B beliebig nahe an Punkt A, erhält man die momentane Änderungsrate im Punkt A. Es folgt eine Umbenennung.

Wenn sich der Wert des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$ einem festen Wert annähert, so heißt dieser Wert Ableitung $f'(x_0)$.



Er gibt die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x_0 an.

Die Ableitung $f'(x_0)$ entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 kann man mit dem Grenzwert (Limes) des Differenzenquotienten berechnen:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

oder

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Die Ableitungsfunktion f' zu einer Funktion f ordnet jeder Stelle x ihren Ableitungswert $f'(x)$ zu.

ABLEITUNGSREGELN FÜR GANZRATIONALE FUNKTIONEN

Potenzregel

Die Funktion f mit $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n > 1$, hat die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Faktorregel

Die Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x), k \in \mathbb{R}$, hat die Ableitung $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

Summenregel

Für die Funktion f mit $f(x) = g(x) + k(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) + k'(x)$.

TANGENTENGLEICHUNG UND STEIGUNGSWINKEL

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ hat die Steigung

$$m = f'(x_0).$$

Den y-Achsenabschnitt t berechnet man durch Auflösen der Gleichung

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + t.$$

Für den Steigungswinkel α des Graphen von f an der Stelle x_0 gilt:

$$\tan(\alpha) = f'(x_0).$$

ANWENDUNG DER DIFFERENTIALRECHNUNG (KURVENDISKUSSION)

MONOTONIE

Die Funktion f heißt **streng monoton zunehmend** bzw. **abnehmend** in einem Intervall I der Definitionsmenge, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ bzw. $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.

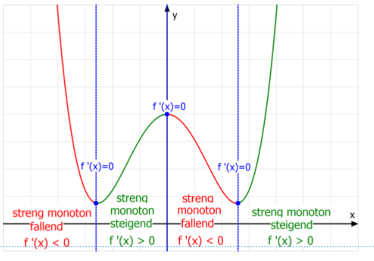
Monotoniekriterium: Wenn für alle $x \in I$ gilt:

$f'(x) > 0$,

dann ist f streng monoton zunehmend in I,

$f'(x) < 0$,

dann ist f streng monoton abnehmend in I.



Kommentiert [BS3]: https://studyflix.de/mathematik/monotonieverhalten-4227

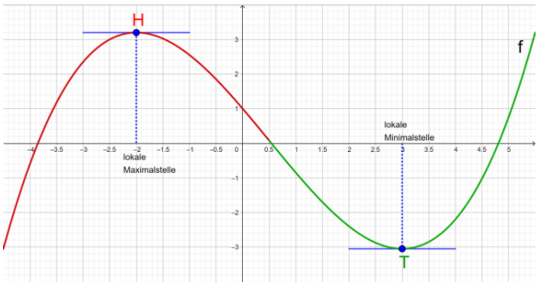
Praxistipp: Vorzeichentabelle für Monotonieverhalten anlegen.

EXTREMSTELLEN UND EXTREMPUNKTE

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 eine Extremstelle, wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat oder wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

- **lokales Maximum**: VZW von + nach – oder $f''(x_0) < 0$
  ➔ **Hochpunkt** des Graphen bei $H(x_0|f(x_0))$
- **lokales Minimum**: VZW von – nach + oder $f''(x_0) > 0$
  ➔ **Tiefpunkt** des Graphen bei $T(x_0|f(x_0))$

Kommentiert [BS4]: http://www.mathe-training-oberstufe.de/lokaleExtrempunkteV2/extrempunkte_beispiel1.html



2. ABLEITUNG – KRÜMMUNG & WENDEPUNKTE

Bewegt man sich auf dem Graphen von f in positiver x-Richtung und beschreibt dabei eine Links- bzw. Rechtskurve, so heißt G_f in diesem Bereich **linksgekrümmt** bzw. **rechtsgekrümmt**.

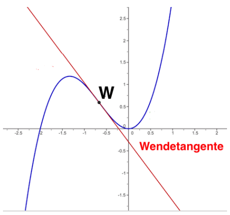
Kriterien:

Ist $f''(x_0) > 0$ für alle $x \in I$, so ist $f'(x)$ streng monoton zunehmend in I und der Graph von f **linksgekrümmt** in I.

Ist $f''(x_0) < 0$ für alle $x \in I$, so ist $f'(x)$ streng monoton abnehmend in I und der Graph von f **rechtsgekrümmt** in I.

An einer **Wendestelle** wechselt der Graph von f die Krümmung.

Kriterien:



Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in I$ eine **Wendestelle**,

wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen VZW hat oder

wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.

Der Punkt $W(x_0|f(x_0))$ ist dann ein **Wendepunkt** von G_f.

Die Tangente an G_f im Wendepunkt heißt **Wendetangente**. Sie durchsetzt den Graphen im Wendepunkt.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ein **Terrassenpunkt**.

Kommentiert [BS5]: https://mein-lernen.at/differentialrechnung/kurvendiskussion/kurvendiskussion-wendetangente/

NEWTONVERFAHREN

Nicht bei allen Funktionen lassen sich die Nullstellen durch (einfache) Rechenverfahren finden; das Newtonverfahren ist ein Näherungsverfahren für die Bestimmung der Nullstellen einer Funktion.

Ist x_n ein Näherungswert einer Nullstelle der Funktion f(x) und $f'(x_n) \neq 0$), dann liefert $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ i.A. einen besseren Näherungswert für diese Nullstelle.